班级:180632 **姓名:张春禧** **学号:18063238**

第一章:随机事件与概率知识点总结

随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的**样本空间**,记为S.样本空间的元素,样本空间的元素,即试验E的每一个结果,称为**样本点**

随机试验E的样本空间S的子集称为E的 **随机事件**,简称 **事件**

和事件积事件运算性质

$$A\bigcup A=A,A\bigcup S=S,A\bigcup\emptyset=A$$
$$A\bigcap A=A,A\bigcap S=A,A\bigcap\emptyset=\emptyset$$

事件间的运算规律

1. **交换律** $A\bigcup B=B\bigcup A;A\bigcap B=B\bigcap A$
2. **结合律** $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C;A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$
3. **分配律** $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C);A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$
4. **德·摩根律** $\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcap\bar{B};\overline{A\bigcap B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
S	样本空间,必然事件	全间
$\emptyset$	不可能事件	空集
e	可能的结果	元素
A	随机事件	子集
$\bar{A}$	A的对立事件	A的补集
$A\subset B$	A出现必然导致 B出现	A是 B的补集
$A=B$	事件 A与事件 B相等	集合 A与集合 B相等
$A\bigcup B$	事件 A与事件B的和事件	集合 A与集合 B的并集
AB	事件 A与事件 B的积事件	集合 A与结婚 B的交集
$A-B$	事件 A与事件 B的差事件	集合 A与集合 B的差集
$AB=\emptyset$	事件 A与 B互不相容	A与 B两集合中没有相同的元素

概率的性质

- 性质1
  - $P(\emptyset)=0$
- 性质2
  - 有限可加性,在无交的时候才可以用

- $P(A)=P(A-B)+P(AB)$前提条件是$P(A-B)\bigcap P(AB)=\emptyset$
- 性质3
  - 减法公式
    - 设 A,B是两个事件,若 $A\subset B$,则有
      - $P(B-A)=P(B)-P(A)$
      - $P(B)\geq P(A)$
      - $B-A=B-AB=B\bar{A}$ 无论何时都会成立
- 性质4
  - 对于任一事件 A,$P(A)\leq 1$
- 性质5
  - 逆事件的概率
    - 对于任一事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$
- 性质6
  - 加法公式
    - 对于任意两事件 A,B.有 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
    - 为什么要减去?因为$P(AB)$是多加的部分,它多加了一遍,所以要减去
  - 推广-多个事件的和事件
    - 先是单个事件概率相加,减去两两事件发生概率,加上三个事件和事件发生概率,减去四个事件和事件发生概率直到n个事件

典型习题

古典概型计算公式

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{的基本事件数}}{S\text{的基本事件的总数}}=\frac{N(A)}{N(S)}$$

几何概型

当随机试验的样本空间是某个区域 S,并且任意一点落在测度(长度、面积、体积)相同的子区域 A是等可能的,而与 A的位置和形状无关.

则事件 A的概率可定义为:

$$P(A)=\frac{mA}{mS}$$

*其中mS是样本空间的测度,mA是构成事件 A的子区域的测度.*这养借助于集合上的测度来合理规定概率称为**几何概型**

小复习

排列组合数

组合数:

$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$

组合数 C_n^m也记为 $\binom{n}{m}$

排列数:

$A_n^m = C_n^m \cdot m! = n(n-1)\cdots(n-m+1)$

排列数 A_n^m也记为 P_n^m

matlab求阶乘以及排列组合数的命令

1. $n!$: `factional(n)` 或 `prod(1:n)`
2. C_n^k: `nchoosek(n,k)`
3. A_n^k: `factional(n)/factional(n-k)`

条件概率公式

定义-已知原因找结果

设 A,B是两个事件,且 $P(A)>0$,称$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$为在事件 A发生的条件下事件 B发生的条件概率

同理可得

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$为事件 B发生的条件下 A发生的概率

乘法定理

设 A,B是两个事件,且 $P(A)>0$,则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \longrightarrow P(AB)=P(A|B)P(A)$$

由此的到下面乘法定理:

设 $P(A)>0$,则有$P(AB)=P(B|A)P(A)$**乘法公式**

推广

设 A,B,C为事件,且 $P(AB)>0$,则有$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$

全概率公式

设试验 E的样本空间为 S,A为 E的事件, $B_1,B_2,\cdots,B_n$为 S的一个划分,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots n)$则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n) // \text{概率的有限可加性} \\ &= P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n) // \text{乘法定理} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A|Bn)P(B_n) // \text{简洁表示法} \end{aligned}$$

上式称为 全概率公式

化整为零——各个击破——合而为一

贝叶斯公式

定义-已知结果找原因

设试验 E的样本空间为 S. A为 E的时间.$B_1, B_2, \cdots, B_n$为 S的一个划分,且 $P(A) > 0, P(B_1) > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j-1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

上式称为 贝叶斯公式

关系

$$\text{条件概率} P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \longrightarrow \text{乘法定理} P(AB) = P(B|A)P(A)$$

$$\downarrow$$

$$\text{全概率公式}$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

$$\downarrow$$

$$\text{贝叶斯公式}$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j-1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, i = 1, 2, \cdots, n$$

事件相互独立的概念

设 A, B, C是三个事件,如果满足不等式

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

A, B, C两两相互独立

则称事件 A, B, C相互独立

$$\left.\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) & \text{两事件互斥} \\ AB = \emptyset & \text{两事件相互独立} \end{cases}\right\}\text{两者之间没有必然联系}$$

往往通过实际加以判断

定理

- 定理一
  - 设 A, B是两事件,且 $P(A) > 0$,若 A, B相互独立,则 $P(B|A) = P(B)$.反之亦然
- 定理二
  - 必然事件 S与任意随机事件 A相互独立;不可能事件与任意随机事件 A相互独立
- 定理三-经常用到
  - 若事件 A与 B相互独立,则下列各事件也相互独立
    - A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B, $\bar{A}$与$\bar{B}$
    - 推论
      - $n(n \geq 2)$个事件相互独立,则其中任意 $k(2 \geq k \geq n)$个事件也是相互独立的
      - $n(n \geq 2)$个事件相互独立,将其中任意多个事件换成与之对立的事件所得的n个事件仍相互独立

伯努利概型

一般把只有两种可能结果 A和 $\bar{A}$的试验,称之为**伯努利试验**或称**伯努利概型**

把试验 E重复 n次,且 n次试验互不影响,则称为 n**重伯努利试验**

定理

- 定理1
  - 每次试验中,事件 A发生的概率为 $p(0 < p < 1)$,则在 n重伯努利试验中,事件 A发生 k次的概率为 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 1, 2, \cdots, n$

随机变量

把随机变量理解为一个函数,对应法则

$$r.v.(random\ variable)\begin{cases}\text{离散型}\\\text{连续型}\\\text{混合型}\end{cases}$$

离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X所有可能取的值为 $x_k(k = 1, 2, \cdots)$, X取各个可能值的概率,即事件 $X = x_k$的概率为

$$P(X = x_k) = p_k\ k = 1, 2, \cdots$$

,称此为离散型随机变量的分布律

说明:由概率的定义,p_k满足如下两个条件:

1. $p_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots$ **非负性**
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} = 1$ **规范性**

表格法

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

常见的离散型变量的概率分布

1. $(0-1)$分布
   1. 公式法
      1. $P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1\ (0 < p < 1)$
   2. 表格法
      1. | X | 0 | 1 |
         |---|---|---|
         | p_k | $1-p$ | p |
2. 伯努利试验、二项分布

1. 伯努利试验
    1. 和上面的伯努利试验描述一致
2. 二项分布
    1. $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$
    2. 这样的分布为二项分布,记为 $X \sim b(n,p)$
    3. 二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ 两点分布(b(1,p)也叫01分布)
3. 泊松分布
    1. 设随机变量 X所有可能的值为 $0,1,2,\cdots$,而取各个值的概率为
    2. $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=1,2,\cdots$,其中 $\lambda>0$是常数.则称 X服从参数为 λ的泊松分布
    3. 记为 $X \sim \pi(\lambda)$
    4. 二项分布 $\xrightarrow{np\to\lambda(n\to+\infty)}$ 泊松分布
    5. **泊松定理**
        1. 设 $\lambda>0$是一个常数, n是任意正整数,设$np_n=\lambda$,则对于任一固定的非负整数 k有 $\lim\limits_{0\to\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
        2. 一般,当 $n \geq 20$,且 $p \leq 0.05$时,使用泊松定理计算近似值颇佳
4. 超几何分布
    1. 若随机变量 X的分布律为
    2. $$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=0,1,\cdots,minn,M$$
    3. 其中 n,M为非负整数且满足: $0 \leq n \leq N, 0 \leq M \leq N$,则称 X满足超几何分布
    4. 用于表示从已知的概率中求事件达成的概率
    5. 与二次分布的关系
        1. 若 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{M}{N}=p$即在无限多个产品中,废品率为 p,则有
        2. $$\lim_{N\to\infty}\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$
5. 几何分布
    1. 进行重复的、独立的伯努利试验,设每次试验的成功的概率为 p,讲实验已知进行到出现**一次**成功为止
    2. 若随机变量 X表示所需要的试验次数,则其分布律为
    3. $$P\{X=k\}=q^{k-1}p, k=1,2,\cdots, \text{其中} q=1-p$$
    4. 则称 X服从参数为 p的几何分布,记为 $X \sim G(p)$
6. 帕斯卡分布
    1. 与几何分布类似,但是要达成出现**r次**成功才能停止(r为常数)
    2. 随机变量 X表示所需要的试验次数,则其分布律为
    3. $$P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}\cdot p^{r-1}\cdot q^{k-r}\cdot p, k=r,r+1,\cdots, \text{其中} q=1-p$$
    4. 则称 X服从帕斯卡分布

matlab代码示例

二项分布

```
n=20;
x=0:n;
p=0.5;
y=binopdf(x,n,p);
figure(1);
plot(x,y,'ro-');
```

泊松分布

```
x=0:15;
y=poisspdf(x,6);
figure(1);
plot(x,y,'ro-');
```

$np \to \lambda$**泊松近似二项分布**

```
y1=poisspdf(x,2);
y2=binopdf(x,10,0.2);
plot(x,y1,'ro-',x,y2,'bo-');
```

分布函数

定义

设 X是一个随机变量, x是任意实数函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < infty$$

称为 X的分布函数

说明

1. 分布函数组要研究随机变量在区间内取值的概率情况
2. 分布函数 $F(x)$是 x的一个普通实函数
3. 离散型随机变量图像为阶梯状
4. 连续型随机变量图像是连续的

性质

1. $F(x)$是一个**单调不减函数**
    1. 对任意实数 $x_1, x_2(x_1 < x_2)$,有
    2. $$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$$
2. $0 \leq F(x) \leq 1$且
    1. $$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$ $$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
3. $F(x+0) = F(x)$,即 $F(x)$是右连续的

重要公式

1. $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$
2. $P\{X > a\} = 1 - F(a)$

设离散随机变量 X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$$

由概率的可列可加性得 X的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leq x\}=\sum_{x_k\leq x}P\{X=x_k\},$$

即

$$F(x)=\sum_{x_k\leq x}p_k$$

这里的和式是对所有满足 $x_k\leq x$的 k的求和的.分布函数 $F(x)$在 $x=x_k(k=1,2,\cdots)$处有跳跃,其跳跃值为 $p_k=P\{X=x_k\}$

连续型随机变量及其概率密度

概率密度函数的定义

如果对于随机变量 X的分布函数 $F(x)$,存在非负可积函数 $f(x)$,使对于任意实数 x有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

则称 X为连续型随机变量,其中函数 $f(x)$称为 X的**概率密度函数**,简称**概率密度**

连续型随机变量的分布函数是连续函数,概率密度未必是连续的

性质

1. $f(x)\geq 0$ 非负性
2. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ 规范性
3. 对于任意实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,$P\{x_1<X\leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$ 转化成积分进行解题
4. 若 $f(x)$在点 x处连续,则有 $F'(x)=f(x)$

$P\{X\leq a\}=F(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$

$P\{X>a\}=1-PX\leq a=1-F(a)=\int_{a}^{\infty}f(x)dx$

注意

对于任意指定值 a,连续型随机变量取 a的概率等于0,即 $P\{X=a\}=\underset{\Delta x\to 0}{lim}\int_{a}^{a+\Delta x}f(x)dx=0$由此得出:

连续型随机变量取值落在某区间的概率与端点无关

- 连续型随机变量
  - 若 $P\{X=a\}=0$则不能决定$X=a$是不可能事件
- 离散型随机变量
  - $\{X=a\}$是不可能事件 $\Longleftrightarrow P(X=a)=0$

常见连续型随机变量及其概率分布

1. 均匀分布

1. $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0, 其他\end{cases}$$
2. 则称 X在 (a,b)上服从均匀分布.记为 $X\sim U(a,b)$
3. 落入区间任意等长度的子区间的可能型相同

2. 指数分布/寿命分布
   1. $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, 其他\end{cases}$$
   2. 其中 $\theta>0$为常数,则称 X服从参数为 θ的指数分布,记为 $X\sim E(\theta)$
   3. 另一种记法,令 $\frac{1}{\theta}=\lambda$
   4. $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$
   5. 记为 $X\sim E(\lambda)$
   6. 分布函数
      1. $$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, 其他\end{cases}$$
      2. 使用积分计算分段函数可得到分布函数
   7. 无记忆性
      1. 对于任意 $s,t>0$,有
      2. $P\{X>s+t|X>s\}=P\{X|t\}$
3. 正态分布/正常分布
   1. $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<\infty$$
   2. 其中 $\mu(任意),\sigma(\sigma>0)$为常数,则称 X服从参数为 μ,σ的**正态分布**或**高斯分布**.记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$
   3. **性质**
      1. 曲线关于 $x=\mu$对称,这表明对于任意 $h>0$,有 $P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\}$
      2. 当 $x=\mu$时渠道最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
      3. 在 $x=\mu\pm\sigma$处曲线有拐点(凹凸性发生改变)
      4. 曲线以 x轴为渐近线
      5. 如果固定 σ,改变 μ的大小,则图形沿着 Ox轴平移,而不改变其形状.正态分布概率分布密度曲线完全由参数 μ确定. μ称为位置参数
      6. 如果固定 μ,改变 σ的大小,$f(x)$图形的对称轴不变,而形状在改变, σ越小,图形越高瘦,σ越大,图形越矮胖.σ称为形状参数
   4. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
   5. $\Phi(0)=0.5$
   6. 特征:倒钟型
4. 标准柯西分布
   1. $$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<\infty$$
   2. 则称 X服从标准柯西分布
   3. 标准柯西分布的分布函数为:
      1. $$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arc\tan x$$

标准正态分布的上 α分位点

$0 < \alpha < 1$

没看懂

离散型随机变量的函数的分布

用图表来计算.

连续型随机变量的函数的分布

定理

设随机变量 X具有概率密度 $f_X(x)$,$-\infty < x < \infty$,设函数 $g(x)$处处可到切恒友 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$),则 $Y = g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, \alpha < y < \beta \\ 0, 其他 \end{cases}$$

其中 $\alpha = min\{g(-\infty), g(\infty), \}\beta = max\{g(-\infty), g(\infty)\}$,$h(y)$是 $g(x)$的反函数

说明

若 $f(x)$在有线区间 $[a, b]$以外等于零,则只需假设在 $[a, b]$上恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$),此时,
$\alpha = min\{g(a), g(b)\}, \beta = max\{g(a), g(b)\}$

第三章:多维随机变量及其分布

多维随机变量

性质

1. $F(x, y)$是变量 x和 y的不减函数,即对于任意固定的 y,当 $x_2 > x_1$时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$;对于任意固定的 x,当 $y_2 > y_1$时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$
2. $0 \leq F(x, y) \leq 1$,且对于任意固定的y,$F(-\infty, y) = 0$,对于任意固定的 x,$F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$
3. $F(x + 0, y) = F(x, y), F(x, y + 0) = F(x, y)$,即 $F(x, y)$关于 x右连续,关于 y也右连续
4. 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$,下述不等式成立:
    1. $$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \quad 加同减异$$
    2. 二维随机变量落入这个面积的概率

二维离散随机变量的分布律

性质

1. 非负性 $p_{ij} \geq 0$
2. 规范性 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

- 公式法
    - 称 $P\{X = x_i, Y = y_i\} = p_{ij}; i, j = 1, 2, \cdots$为离散型随机变量 (X, Y)的分布律,或随机变量 X和 Y的联合分布律

- 表格法
$Y \setminus X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}

二维连续型随机变量

性质

1. $f(x,y) \geq 0$ 非负性
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$ 规范性
3. 设 G是 xoy平面上的区域,点(X,Y)落在 G内的概率为 $P\{(X,Y) \in G\} = \underset{G}{\int\int} f(x,y)dxdy$
4. 若 $f(X,Y)$在 (x,y)连续,则有 $\frac{\partial^2 F(X,Y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

边缘分布

$F_X(x) = P\{X \leq x\} = F(x,+\infty) = P\{X \leq x, Y < +\infty\}$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty,y) = P\{x < +\infty, Y \leq y\}$

二维离散型的联合分布和边缘分布

$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum\limits_{x_i \in X}\sum\limits_{y_j \in Y} P_{ij}$

二维连续型

定义

1. $f(x,y) \geq 0$非负性
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ 规范性
3. $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$
4. $P\{(x,y) \in G\} = \underset{G}{\int\int} f(x,y)dxdy \;\; G$是 X,Y平面上的一个区域

条件分布

离散型

二维离散型随机变量的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_i\} = P_{ij}, i,j = 1,2\cdots$$

由条件概率公式

$$P\{X=x_i,Y=y_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_i\}}{P\{Y=y_i\}}=\frac{P_{ij}}{P_j},i=1,2,\cdots$$

性质

1. $P\{X=x_i|Y=y_i\}\geq 0$ 非负性
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i|Y=y_i\}=1$ 规范性

连续型

二维连续型随机变量 (X,Y)的联合概率密度 $f(x,y)$

边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$

若 $f_Y(y)>0$在 $Y=y$的情况下

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$

$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$F(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$

$P\{X\leq x|Y\leq y\}=\frac{P\{X\leq x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon}f(u,v)dudv}{\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon}f_v(v)dv}=\frac{\int_{-infty}^{x}f(u,v)du}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$

随机变量的独立性

离散型

$P\{X=x_i,Y=y_i\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_i\}$

连续型

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

多维随机变量函数的分布

卷积公式

对于连续型随机变量 (X,Y),设其概率密度函数为 $f(x,y)$,则 $Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}=\int\int\limits_{x+y\leq z}f(x,y)dxdy$$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_x(z-y)\cdot f_Y(y)dy$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Z(z-x)dx$